

Prüfungsprotokoll Mathematik

Fach: Wissenschaftl. Rechnen (Sci. Comp.) ☒ Bachelor
Studiengang: Technomathematik ☐ Master

(Sonstiges bitte von Hand eintragen.) — Anrechnung später im Master

Prüfer/in: Jürgen Fuhrmann

Beisitzer/in: René Kehl

Datum: 25.04.2018

Note: 2,3

Prüfungsdauer: 32 Minuten

Anzahl der Kandidaten: 1

Vorbereitungszeit: 5 Tage à 5 Std.

Literatur: Skript, „Numerik für Ingenieure, Physiker und Informatiker“ — Bärwolf

Beurteilung der Prüfung und des/r Prüfers/in:

- entspannte Prüfung, viel freies Reden
- Herr Fuhrmann und auch René helfen weiter, wenn es klemmt

Fragen:

Einstiegsfrage: Wir wollen die Wärmeleitungsgleichung mit homogenen Dirichlet-Randbed. ~~lösen~~ mithilfe der FE-Methode lösen — Wü macht man das?

$$-\nabla \cdot \nabla \lambda u = f \text{ auf } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

→ schwache Formulierung herleiten (Multiplikation mit Testfkt, Integration, Green's Theorem)

$$-\int_{\Omega} (\nabla \cdot \nabla \lambda u) v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$

$$\stackrel{\text{Green}}{\Rightarrow} \underbrace{\int_{\Omega} \lambda \nabla u \cdot \nabla v \, dx}_{=: a(u,v)} = \underbrace{\int_{\Omega} f v \, dx}_{=: f(v)}$$

~~FE~~ → Diskretisierung: $V_h \subset V$ endlichdimensionaler Unterraum
suche $u_h \in V_h$: $a(u_h, v_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$

Frage: Was wissen wir über die Lösbarkeit dieses Problems?

→ Lax-Milgram: V Hilbertraum, a selbstadj., koerzitive Bilinearform $\Rightarrow$ eindeutige Lösbarkeit

aus der Lösbar. des kontinuierl. Problems $\Rightarrow$ Lösbarkeit des diskreten Problems

Weiter mit Galerkin-Verfahren: Basis $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ von V_h

$$\Rightarrow u_h = \sum_{j=1}^n u_j \phi_j$$

$$\Rightarrow \text{löse } \sum_{j=1}^n a(\phi_j, \phi_i) u_j = f(\phi_i) \Leftrightarrow AU = F$$

- wähle Basis so, dass möglichst oft gilt

$$a(\phi_i, \phi_j) = 0 \Rightarrow \text{Matrix } A \text{ dünnbesetzt}$$

Übergang zur Definition eines Finiten Elements

$\{K, P, \Sigma\}$ mit $K \subset \mathbb{R}^d$ mit Lipschitz-Rand, nichtleeres Inneres

endlichdimensionaler Vektorraum von Funktionen $p: K \rightarrow \mathbb{R}$
- in unserem Fall Polynome -

$\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_s\} \subseteq \mathcal{L}(P, \mathbb{R})$ lokale Freiheitsgrade, sodass

$P \rightarrow \mathbb{R}^s, p \mapsto (\sigma_1(p), \dots, \sigma_s(p))$ bijektiv ist, also

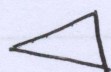
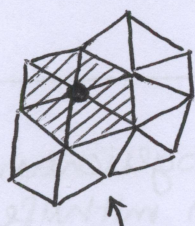
Σ basis von $\mathcal{L}(P, \mathbb{R})$

→ gut erklärt anhand von Lagrange Finiten Elementen unter:
www.uni-muenster.de/AMM/num/Vorlesungen/WissenschaftlichesRechnen

- WS12/13/

Dateien/FEM-intro.pdf

Bild: vom einzelnen Dreieck zur gesamten Triangul.



- Einführung von globalen Koordinaten

→ zusammensetzen der globalen Steifigkeitsmatrix aus lokalen Matrizen

Träger der Formfunktion im markierten Punkt?

Frage: Welche Eigenschaften hat die Steifigkeitsmatrix? (bei $P = \mathbb{P}_1$)

- symmetrisch positiv definit

Jetzt also Gleichungssystem $Ax = b$ lösen.

Frage: Welche Möglichkeiten gibt es?

- direkte und indirekte Verfahren, z.B. Cholesky-Zerlegung und CG-Verfahren

→ Empfehlung: indirektes Verfahren $\Rightarrow$ konvergiert schneller, oft einfacher zu implementieren

- CG für $n \times n$ Matrix konvergiert spätestens nach n Schritten
Idee von CG erläutern: steilster Abstieg, A adj. Suchrichtungen

Zwischenfrage: Für $n = 1.000.000$ dauert das auch sehr lange -
was kann man tun? (genaue Def. der Konvergenzrate)

$$\|e_i\|_A \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^i \|e_0\|_A \quad \kappa = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}$$

$\Rightarrow$ Konvergenzrate abh. von der Konditionszahl von A

$\Rightarrow$ Lösung für schnellere Konvergenzrate = Präkonditionierung

Multiplikation von A mit etwas, das die Konditionszahl senkt
 $EE^T = A$ Cholesky-Zerlegung, M spektral äquivalent zu A
 $M = EE^T$

mit $\kappa(M^{-1}A) \ll \kappa(A)$

→ Löse GS mit CG mit

$$E^{-1}AE^T \tilde{x} = E^{-1}b$$

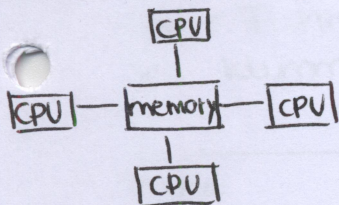
Frage: Was tun wir, wenn A nicht symmetr. ist?

— z.B. Gauss-Seidel-Verfahren

Themensprung:

Parallel Paradigms $\Rightarrow$ SIMD, MIMD

shared memory MIMD

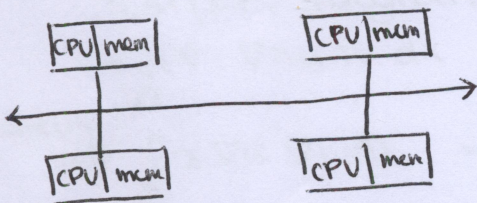


— Threads: — wie in C++ nutzen?

`std::threads`, `mutex`, `OpenMP`

Was ist der Unterschied zwischen OpenMP and OpenMPI?

OpenMPI verwaltet auch Datenübergabe bei distributed memory



— wie verhindert man Unberechtigten Zugriff von Threads auf Daten bei OpenMP?

— `#pragma omp critical`